УДК 624.04

Д.Н. Низомов, А.А. Ходжибоев*
*ИГССС АН РТ, *ТТУ им. акад. М.С. Осими*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДВУХСЛОЙНОГО ПОДКРЕПЛЕНИЯ

На основе метода граничных интегральных уравнений разработаны математическая модель и алгоритм расчета двухслойного подкрепления. Система разрешающих уравнений, полученная в результате дискретного представления, группируется путем объединения уравнений для каждого из подобластей с учетом совместимости условий на контактных границах. На примере тестовой задачи исследованы сходимость и точность численного моделирования. Приведены результаты численного решения задачи одноосного растяжения пластинки с двумя кольцами подкрепления. Алгоритм реализован на примере анализа напряженно-деформированного состояния в конструкции смотровой галереи плотины Нурекской ГЭС.

Решена краевая задача для неоднородного тела, в котором отверстия, находящиеся в неограниченной плоскости, подкреплены несколькими кольцами. Обделка тоннелей и подземных сооружений в массиве горных пород, смотровые галереи в теле земляных плотин, которые в основном состоят из двух слоев бетона с различными модулями упругости и коэффициентами Пуассона, относятся к таким задачам. Подкрепленные подземные сооружения в условиях плоской деформации представлены в виде двухмерной модели, находящейся под воздействием начальных тектонических напряжений, равномерного внутреннего давления и др. Приведены графики изменения тангенциальных напряжений на контурах колец подкрепления и выработки.

Ключевые слова: контактная граница, граничные уравнения, концентрация напряжений, дискретная модель, двухслойное подкрепление, граничные элементы, условие совместности, фундаментальное решение.

Краевая задача для неоднородного тела, в котором отверстия подкрепляются несколькими кольцами, представляет практический интерес. Обделка тоннелей и подземных сооружений в массиве горных пород, смотровые галереи в теле земляных плотин в основном состоят из двух слоев бетона с различными модулями упругости и коэффициентами Пуассона. Подкрепленные подземные сооружения в условиях плоской деформации могут быть представлены в виде двухмерной модели, находящейся под воздействием начальных тектонических напряжений (рис. 1).

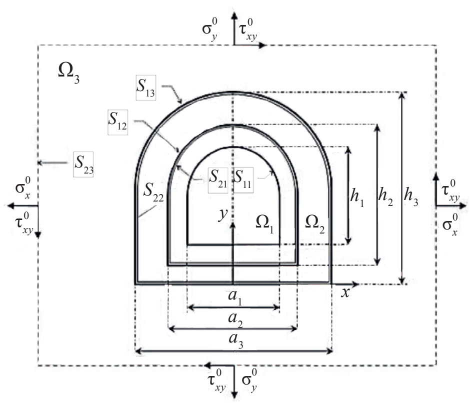


Рис. 1. Бесконечная область с двумя кольцами подкрепления

Введем обозначения: Ω_1, Ω_2, Ω_3 — внутренние области кольца подкрепления и массива горных пород; S_{11}, S_{12} — внутренняя и внешняя поверхности первого кольца подкрепления; S_{12}, S_{22} — внутренняя и внешняя поверхности второго кольца подкрепления; S_{13} — контур отверстия в породном массиве; S_{23} — внешняя граница бесконечной области Ω_3; $\Gamma_1 = S_{11}$, $\Gamma_2 = S_{21}$, $\Gamma_3 = S_{22}$ — границы, в которых определяются векторы перемещений и контактных напряжений; $\Gamma_n(m_n)$ — контур, который разбивается на m граничных элементов; μ_j, ν_j ($j = 1, 2, 3$) — модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответствующих областей; $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ — заданные на бесконечности начальные напряжения; p_x^0, p_y^0 — заданные поверхностные напряжения; u_x, u_y, p_x, p_y — компоненты искомых перемещений и контактных напряжений.

Предполагается, что на контур отверстия массива горных пород S_{13} впаяно кольцо $\Omega_2 + S_{12} + S_{22}$, а на внутренний контур этого кольца впаяно кольцо $\Omega1 + S_{11} + S_{21}$. Кроме заданных на бесконечности начальных напряжений, в зависимости от функционального назначения подземного сооружения, могут быть заданы нагрузки на контур S_{11}. Например, обделка напорного гидротехнического тоннеля испытывает равномерное внутреннее давление по всей поверхности S_{11}, а в транспортном тоннеле нагрузка действует на часть этой поверхности.

Граничное интегральное уравнение, записанное для каждой из двух компонент перемещения в точке ξ, представляется в общем виде [2]:

$$\psi_{ij}(\xi)\overline{u}_j(\xi) + \int_{S_1} p_{ij}^*(\xi, x)\overline{u}_j(x)\,ds - \int_{S_2} u_{ij}^*(\xi, x)\overline{p}_j(x)\,ds =$$

$$= -\int_{S_{11}} u_{ij}^*(\xi, x)\left(q_j + p_j^0\right)ds - \int_{S_2} u_{ij}^*(\xi, x)p_j^0(x)\,ds\,,\ (i, j = 1, 2)\,, \tag{1}$$

$$\psi_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{S_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x)\,ds(x)\,,$$

где $S_1 = S_{11} + S_{21} + S_{22}$, $S_2 = S_{21} + S_{22}$, $u_{ij}^*(\xi, x)$, $p_{ij}^*(\xi, x)$ — фундаментальные решения Кельвина [1]; δ_{ij} — символ Кронекера. Разбивая контуры колец подкрепления на граничные элементы, из (1) получаем систему уравнений, которую можно представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \grave{A}_1 & \hat{A}_1 & \mathring{A}_1 & F_1 \\ C_1 & D_1 & G_1 & H_1 \\ A_2 & B_2 & E_2 & F_2 \\ C_2 & D_2 & G_2 & H_2 \\ A_3 & B_3 & E_3 & F_3 \\ C_3 & D_3 & G_3 & H_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ P_x \\ P_y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathring{A}_1^* & F_1^* \\ G_1^* & H_1^* \\ E_2^* & F_2^* \\ G_2^* & H_2^* \\ E_3^* & F_3^* \\ G_3^* & H_3^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x^0 \\ P_y^0 \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Здесь векторы искомых перемещений и напряжений записываются в виде

$$U_x = (U_{x,1}\ U_{x,2}\ U_{x,3}),\ \ U_y = (U_{y,1}\ U_{x,2}\ U_{x,3})\,,$$

$$P_x = (P_{x,2}\ P_{x,3}),\ \ P_y = (P_{y,2}\ P_{y,3})\,,$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют контурам Γ_1, Γ_2 и Γ_3. Индексы 1, 2 и 3 в блочных матрицах (2) указывают на принадлежность к контурам областей Ω_1, Ω_2, Ω_3. Блочные матрицы $A_1, B_1, ..., H_1$ и $A_2, B_2, ..., H_2$ состоят из матриц коэффициентов, соответствующие контурам Ω_1 и Ω_2, а A_3, B_3, ..., H_3 состоят из матриц коэффициентов, соответствующие контуру отверстия:

ISSN 1997-0935. Vestnik MGSU. 2012. № 5

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0_{23} \end{bmatrix},\ E_1 = \begin{bmatrix} E_{12} & 0_{13} \\ E_{22} & 0_{23} \end{bmatrix},\ E_1^* = \begin{bmatrix} E_{22} & E_{23} \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0_{21} & A_{22}^* & A_{23} \\ 0_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} E_{22}^* & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{bmatrix},\ E_2^* = \begin{bmatrix} E_{22}^* & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}, \tag{3}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 0_{31} & 0_{32} & A_{33}^* \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0_{32} & E_{33}^* \end{bmatrix},\ E_3^* = \begin{bmatrix} 0_{32} & E_{33}^* \end{bmatrix}.$$

Блочные матрицы B, C, D и F, G, H в (2) записываются аналогично матрицам A и E с соответствующей заменой. Прямоугольные матрицы коэффициентов $A_{nk} = (a_{ij})$, $E_{nk} = (e_{ij})$, $n \neq k$, где i, j отсчитывают граничные элементы вдоль контуров $\Gamma_n(m_n)$ и $\Gamma_k(m_k)$ (n, k = 1, 2, 3), имеют размер $m_n \times m_k$. Индексы в прямоугольных нулевых матрицах (3) определяют их размеры. Компоненты векторов внешних сил формируются исходя из заданных напряжений на бесконечности, а также нагрузки на внутреннем контуре первого кольца подкрепления

$$P_x^0 = \left(P_{x,1}^0\ P_{x,2}^0\ P_{x,3}^0\right),\quad P_y^0 = \left(P_{y,1}^0\ P_{y,2}^0\ P_{y,3}^0\right),$$

где поверхностные напряжения в начальном состоянии выражаются формулами

$$p_x^0 = \sigma_x^0 \cos\alpha_1 + \tau_{xy}^0 \sin\alpha_1 - q_x,\quad p_y^0 = \sigma_y^0 \cos\alpha_1 + \tau_{xy}^0 \cos\alpha_1 - q_y,$$

α_1 — угол между осью x и нормали к поверхности, q_x, q_y — составляющие нагрузки, действующие на участках контура S_{11}.

Таким образом, из решения (2) определяются векторы перемещений и напряжений, а затем вычисляются нормальные и тангенциальные перемещения, а также тангенциальные, нормальные и касательные напряжения

$$u_n = u_x \cos\alpha_1 + u_y \sin\alpha_1,\quad u_s = u_x \sin\alpha_1 - u_y \cos\alpha_1,$$

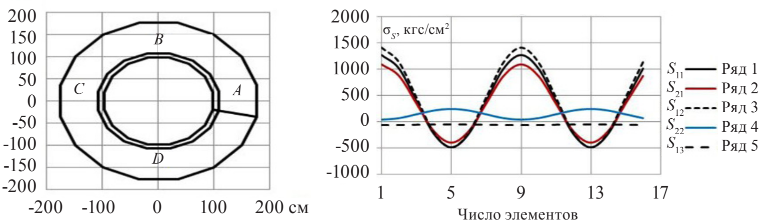
$$\sigma_s = \bar{\sigma}_s + \sigma_s^0 = (2\mu\bar{\varepsilon}_s + \nu\bar{\sigma}_n)/(1-\nu) + \sigma_s^0 =$$
$$= [2\mu\bar{\varepsilon}_s + \nu(\bar{p}_x \cos\alpha_1 + \bar{p}_y \sin\alpha_1)]/(1-\nu) + \sigma_x^0 \sin^2\alpha_1 + \sigma_y^0 \cos^2\alpha_1 - 2\tau_{xy}^0 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1,$$

$$\sigma_n = \bar{\sigma}_n + \sigma_n^0 = \bar{p}_x \cos\alpha_1 + \bar{p}_y \sin\alpha_1 + \sigma_x^0 \cos^2\alpha_1 + \sigma_y^0 \sin^2\alpha_1 - 2\tau_{xy}^0 \cos\alpha_1 \sin\alpha_1,$$

$$\tau_{ns} = \bar{\tau}_{ns} + \tau_{ns}^0 = \bar{p}_x \sin\alpha_1 - \bar{p}_y \cos\alpha_1 + (\sigma_y^0 - \sigma_x^{\circ}) \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + \tau_{xy}^0 (\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1).$$

Алгоритм расчета был реализован для анализа концентрации напряжений в конструкции смотровой галереи первого яруса плотины Нурекской ГЭС, расположенной в теле ядра плотины на отметке 765 м (рис. 2, *а*). Протяженность галереи, включая прискальные блоки, составляет l = 415 м и состоит из 15 секций по 29,4 м каждая. Действующие нагрузки на смотровую галерею состоят из вертикальной нагрузки от веса плотины q = 32 кгс/см², гидростатической нагрузки p = 14,5 кгс/см² и бокового давления s = 10,7 кгс/см². Следовательно, галерея испытывает двухосное сжатие напряжениями

$$\sigma_x^0 = -(p+s) = -25,2 \text{ кгс/см}^2;\quad \sigma_{б}^0 = -(q+p) = -46,5 \text{ кгс/см}^2.$$



а *б*

Рис. 2. Дискретная модель смотровой галереи и распределение тангенциальных напряжений на ее контурах

Конструкция галереи состоит из железобетонного массива марки М300 с внутренним диаметром d = 220 см и железобетонной трубы с внешним диаметром d = 220 см, толщиной стенки t = 10 см. Получены результаты расчета смотровой галереи, находящиеся в условиях плоской деформации (см. рис. 2, *а*), при следующих данных:

$R_1 = 100$ см, $R_2 = 110$ см, $R_3 = 180$ см;

$E_1 = 2{,}15 \cdot 10^4$ МПа ($2{,}15 \cdot 10^5$ кгс/см^2), $E_2 = 2{,}75 \cdot 10^4$ МПа ($2{,}75 \cdot 10^5$ кгс/см^2);

$E_3 = 1{,}31 \cdot 10^3$ МПа ($1{,}31 \cdot 10^4$ кг/см^2), $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}25$, $\nu_3 = 0{,}44$.

На рис. 2, *б* показаны графики изменения тангенциальных напряжений вдоль контуров колец подкрепления смотровой галереи. Наибольшие растягивающие напряжения возникают в сечениях A и C на контактной границе между кольцами (кривая *3*). На контактной границе с телом ядра плотины возникают только сжимающие напряжения с наибольшим значением $\sigma_s = -60{,}77$ кгс/см^2 (кривая *5*). Для сравнения отметим, что если кольца и среда состоят из одного и того же материала с модулем упругости $E = 1{,}67 \cdot 10^5$ кгс/см^2 и коэффициентом Пуассона $\nu = 0{,}3$, то от заданной нагрузки на контурах системы возникают только сжимающие тангенциальные напряжения с наибольшим значением $\sigma_s = -117{,}77$ кгс/см^2, соответствующие точкам A и C.

Вывод. Предлагаемая математическая модель, разработанные алгоритм и программа расчета напряженно-деформированного состояния контактной задачи взаимодействия двухслойного подкрепления и массива горных пород позволяют исследовать подземные сооружения при различных воздействиях.

Библиографический список

1. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М. : Мир, 1987. 524 с.
2. *Низомов Д.Н.* Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. М. : Изд-во АСВ, 2000. 282 с.

Поступила в редакцию в апреле 2012 г.

Об авторах: **Низомов Джахонгир Низомович** — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Академии наук Республики Таджикистан, заведующий лабораторией теории сейсмостойкости и моделирования, **Институт геологии, сейсмостойкого строительства и сейсмологии Академии наук Республики Таджикистан (ИГССС АН РТ)**, 734029, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Айни, 267, +992 919 35 57 34, tiees@mail.ru;

Ходжибоев Абдуазиз Абдусатторович — кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой строительной механики и сейсмостойкости сооружений, **Таджикский технический университет (ТТУ) имени академика М.С. Осими** Министерства образования Республики Таджикистан, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект академиков Раджабовых, д. 10, +992 918 89 35 14, hojiboev@mail.ru.

Для цитирования: *Низомов Д.Н., Ходживоев А.А.* Численное моделирование задачи двухслойного подкрепления // Вестник МГСУ. 2012. № 5. С. 67—71.

D.N. Nizomov, A.A. Hodzhiboev

NUMERICAL MODELING OF THE PROBLEM OF DOUBLE-LAYER REINFORCEMENT

The article covers the mathematical model and the algorithm of calculation of the double-layer reinforcement based on the method of boundary integral equations developed by the authors. The system of equations, based on discrete representation, is a combination of equations describing each of sub-domains with account for the conditions of compatibility alongside the contact boundaries. The convergence and accuracy of numerical modeling is based on the testing results of the problem under consideration. Results of the numerical solution of the problem of uniaxial tension of the plate that has two layers of reinforcement are provided in the article. The algorithm is implemented by analyzing the stress-strained state of structures of Nurek hydraulic power plant.

The proposed solution is applicable in the lining of tunnels and subterranean structures in rock massifs, as well as galleries arranged in the body of earth dams. It represents two layers of concrete with different values of the modulus of elasticity and Poisson ratio. Tangential stress and reinforcement ring graphs are presented in the article.

Key words: contact boundary, boundary equations, stress concentration, discrete model, double-layer reinforcement, boundary elements, compatibility conditions, fundamental solution.

References

1. Brebbiya K., Telles Zh., Vroubel L. *Metody granichnykh elementov* [Methods of Boundary Elements]. Moscow, Mir Publ., 1987, 524 p.

2. Nizomov D.N. *Metod granichnykh uravneniy v reshenii staticheskikh i dinamicheskikh zadach stroitel'noy mekhaniki* [Method of Boundary Elements Applicable for Resolution of Static and Dynamic Problems of Structural Mechanics]. Moscow, ASV Publ., 2000, 282 p.

About the authors: **Nizomov Dzhakhongir Nizomovich** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Associate Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan; Director, Laboratory of Theory of Seismic Stability and Modeling, **Institute of Geology, Seismic Construction and Seismology**, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, 267 Ayni st., Dushanbe, 734029, Republic of Tajikistan, tiees@mail.ru, +7 (992) 919-35-57-34;

Khodzhiboev Abduaziz Abdusattorovich — Candidate of Technical Sciences, Associated Professor, Chair, Department of Structural Mechanics and Seismic Stability of Structures, **Tajik Technical University named after academic M.S. Osimi,** 10 Akademikov Radzhabovyh St., 734042, Dushanbe, Republic of Tajikistan, hojiboev@mail.ru, +7 (992) 918-89-35-14.

For citation: Nizomov D.N., Hodzhiboev A.A. Chislennoe modelirovanie zadachi dvukhsloynogo podkrepleniya [Numerical Modeling of the Problem of Double-Layer Reinforcement]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2012, no. 5, pp. 67—71.