УДК 531

DOI: 10.22227/1997-0935.2017.8.869-875

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛОСКОЙ ВНЕШНЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ

М.Н. Кирсанов, А.П. Суворов*

Национальный исследовательский университет Московский Энергетический Институт (НИУ МЭИ), 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14;

**Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26*

АННОТАЦИЯ. Плоская статически определимая ферма с параллельными поясами имеет крестообразную решетку и опирается на две неподвижные шарнирные опоры. Целью данной работы является расчет фермы с разным числом панелей *n* в аналитической и численной форме. Усилия в стержнях определяются в символьной форме методом вырезания узлов с использованием системы компьютерной математики Maple. Для проверки решения используется конечно-элементный расчет по программе LISA 8.0. Замечено, что при нечетном числе панелей ферма кинематически изменяема. Приведена соответствующая схема возможных скоростей. Для получения аналитической зависимости прогиба от числа панелей использован метод индукции и формула Максвелла-Мора. Для определения общих членов последовательностей коэффициентов задействованы операторы составления и решения рекуррентных уравнений. Получены формулы для усилий в наиболее сжатых стержнях фермы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ферма, прогиб, индукция, Maple, аналитическое решение

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 8 (107). С. 869–875. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.8.869-875

STUDYING DEFORMATIONS OF AN FLAT TRUSS STRUCTURE STATICALLY INDETERMINATED EXTERNALLY

M.N. Kirsanov, A.P. Suvorov*

National Research University Moscow Power Engineering Institute (MPEI), 14 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250, Russian Federation;

**Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation*

ABSTRACT. A flat statically determinate parallel-chord truss structure has a cross-shaped grid and rests upon two rigid pin-bearing supports. Loads in bars are determined in a symbol form using the method of joint isolation by the computer mathematics Maple system. The peculiarity of the considered truss structure is its external static indeterminacy. In fact, all efforts and reactions of supports can be determined from the equilibrium conditions. But the inconvenience is necessary to consider the equilibrium of all the nodes of the truss. The Ritter cross-section method is not applicable to this truss structure. The sections that cut the truss into two parts and pass through the three rods, here exist only for several rods of the extreme panels. The purpose of this paper is to calculate a truss structure with a different number of panels in analytical and numerical form. Finite element calculation method with the use of software LISA 8.0 is applied. It's noted that a truss structure is kinetically changeable when the number of spans is odd. The corresponding plan of probable velocities is given. In order to receive analytic dependence of deflection on the span number, the induction method and Maxwell-Moor formula has been applied. The operators of the compilation and solution of recurrence equations are involved in determining the general terms of the coefficient sequences. The formulas for calculation of loads in the most compressed bars of a truss structure were received.

KEY WORDS: truss structure, deflection, induction, Maple, analytic solution

FOR CITATION: Kirsanov M.N., Suvorov A.P. Issledovanie deformatsiy ploskoy vneshne staticheski neopredelimoy fermy [Studying Deformations of an Flat Truss Structure Statically Indeterminated Externally]. Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2017, vol. 12, issue 8 (107), pp. 869–875. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.8.869-875

Существуют различные подходы к оптимизации стержневых конструкций. В последнее время бурно развиваются нейросетевые модели [1], генетические алгоритмы [2–10] и методы линейного программирования [11]. При этом остаются актуальными расчет и оптимизация на основе точных аналитических решений. Известно, что получение точных формул с широким диапазоном применения, необходимым для более точного выбора оптимального решения, возможно для регулярных периодических ферм [12] с использованием метода индукции и систем символьных преобразований [13–19]. Замечено также, что для некоторых периодических конструкций существенным фактором является четность числа панелей или делимость этого числа на некоторое число или числа. Для одних чисел панелей конструкция

© Кирсанов М.Н., Суворов А.П., 2017

кинематически неизменяема, для других она превращается в мгновенно изменяемый механизм [20–24]. В последнем случае необходимо заменить расчетную модель конструкции с шарнирами, для которой можно получить аналитическое решение, на ферму с жестким соединением стержней в узлах и рассчитывать последнюю уже численно с применением специализированных программ. Пример такого расчета представлен в настоящей работе.

Для исследования была выбрана ферма, топология которой показана на рис. 1. Ферма состоит из двух типов панелей: краевых и центральных. Две краевые панели располагаются по краям фермы и имеют по четыре стержня и неподвижную шарнирную опору. Центральные панели также имеют по четыре стержня: два горизонтальных стержня поясов и два раскоса. Раскосы расположены в разных плоскостях и не соединены между собой. Целью данной работы является расчет фермы с разным числом панелей n в аналитической и численной форме. На рис. 1 показана ферма с шестью панелями. Если центральные панели отсутствуют, то получим ферму с всего двумя панелями.

Полный пролет фермы вычисляется по длине верхнего пояса и принимается равным L. Таким образом, длина одной панели a вычисляется как

$$a = L/n. \tag{1}$$

Высота фермы равна h. Опоры в крайних панелях располагаются на расстоянии $h/2$ от верхнего и нижнего пояса.

Особенность рассматриваемой фермы состоит в ее внешней статической неопределимости. На самом деле все усилия и реакции опор можно определить из условий равновесия. Но неудобство заключается в том, что для определения реакций опор необходимо рассмотреть равновесие всех узлов фермы. К этой ферме неприменим и метод сечений Риттера. Сечения, рассекающие ферму на две части и проходящие через три стержня, здесь существуют только для нескольких стержней крайних панелей.

Допустим, что равномерно-распределенная нагрузка приложена к верхнему поясу фермы. Эта нагрузка распределяется между узлами верхнего пояса по известному правилу: к крайним узлам прикладывается сила $P/2$, а ко всем остальным узлам верхнего пояса прикладывается сила P. Таким образом, полная результирующая сила R, приложенная к ферме,

$$R = Pn, \tag{2}$$

а значение равномерно-распределенной нагрузки q может быть вычислено как

$$q = R/L. \tag{3}$$

Предположим, что стержни фермы имеют одинаковое сечение. Таким образом, жесткость всех стержней — постоянная величина. Обозначим жесткость элементов фермы на растяжение/сжатие как EA.

Если число панелей n четное, то для фермы с шарнирами в узлах могут быть получены аналитические формулы, в частности для определения прогибов середин нижнего и верхнего пояса и усилий в критических (наиболее сжатых и растянутых) стержнях. Если же число панелей n нечетное, то ферма с шарнирами в узлах становится кинематически изменяемой. При расчете это проявляется в равенстве нулю определителя системы уравнений равновесия и подтверждается наличием непротиворечивой схемы возможных скоростей узлов (рис. 2).

Таким образом, для расчета фермы с нечетным числом панелей шарнирная модель фермы неприменима, и здесь надо использовать другую модель, в которой учитывается ненулевая изгибная жесткость в узлах фермы и ненулевая изгибная жесткость самих стержней фермы. Аналитические результаты в этом случае получить затруднительно, и поэтому для расчета можно использовать метод конечных

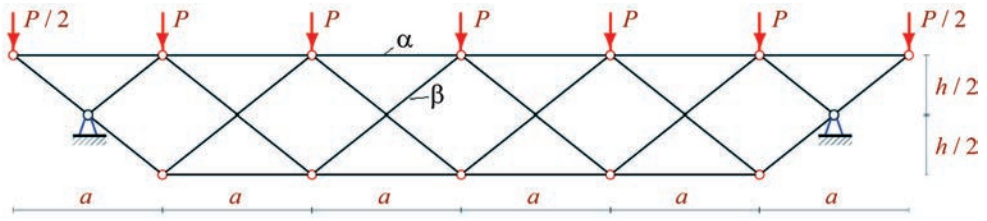


Рис. 1. Ферма при $n = 2k = 6$

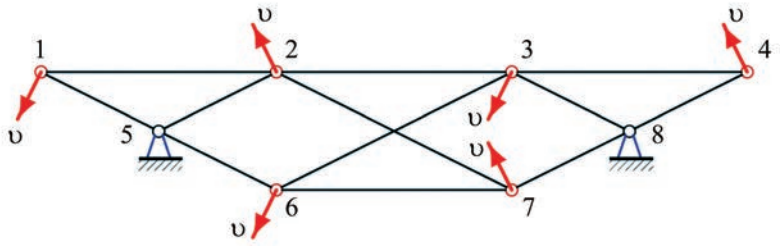


Рис. 2. Возможные скорости изменяемой фермы ($n = 3$)

элементов. Также расчет фермы с нечетным числом панелей можно производить по деформированной схеме, т.е. с учетом геометрической нелинейности, однако здесь этот метод не рассматривается.

Приводим аналитическое решение для прогибов середины нижнего пояса для фермы с четным числом панелей и с шарнирами в узлах. Обозначим прогиб как Δ. Тогда

$$\Delta' = \frac{\Delta EA}{RL} = \frac{A_k + C_k\sqrt{(1+h^2/a^2)^3}}{2n^2(h^2/a^2)}, \qquad (4)$$

где Δ' — нормированный, безразмерный прогиб, а коэффициенты A_k и C_k вычисляются в соответствии с формулами

$$k = n/2,$$

$$C_k = k(k-1)/2,$$

$$A_k = \frac{1}{6}\left(\begin{array}{l} 5k^4 - 10k^3 + 4k^2 + \\ + k(1-3(-1)^k) + \frac{3}{2}((-1)^k - 1) \end{array}\right). \qquad (5)$$

Коэффициенты A_k получены обобщением последовательности 0; 2; 30; 116; 332; 742; 1466; 2600; 4312; 6730; 10070; 14492; 20260; 27566 с помощью операторов rgf_findrecur и rsolve специализированного пакета genfunc системы Maple [25] как решение рекуррентного уравнения

$$A_k = 3A_{k-1} - A_{k-2} + 5A_{k-3} + \\ + 5A_{k-4} + A_{k-5} - 3A_{k-6} + A_{k-7}.$$

Коэффициенты C_k обобщают последовательность 0; 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45; 55; 66; 78; 91 и являются решением уравнения

$$C_k = 3C_{k-1} - 3C_{k-2} + C_{k-3}.$$

Аналогично вертикальное смещение среднего узла верхнего пояса выражается по формуле

$$\Delta' = \frac{\Delta EA}{RL} = \frac{A_k + C_k\sqrt{(1+h^2/a^2)^3}}{4n^2(h^2/a^2)}, \qquad (6)$$

а коэффициенты A_k и C_k вычисляются в соответствии с формулами

$$k = n/2,$$

$$C_k = k(k-1) + 1,$$

$$A_k = \frac{1}{3}\left(\begin{array}{l} 5k^4 - 10k^3 + 4k^2 + \\ + k(1+3(-1)^k) + \frac{3}{2}(1+(-1)^{k+1}) \end{array}\right). \qquad (7)$$

Одновременно с прогибом в системе Maple могут быть получены аналитические выражения для продольных усилий в стержнях. Обозначим усилие как *S*. Тогда усилие в среднем стержне верхнего пояса, обозначенного на рис. 3 цифрой 3, может быть найдено по формуле

$$S'_\alpha = \frac{S_\alpha}{R} = -\frac{k^2-k-1}{2n}\frac{a}{h}, \quad k = n/2, \qquad (8)$$

где *S'* — нормированное, безразмерное усилие. Как следует из этой формулы, при $n = 2$ стержни верхнего пояса, являющиеся средними, растянуты и продольные силы в них равны $S'_\alpha = L/(8h)$. При $n = 4$ $S'_\alpha = -L/(32h)$, а при $n = 6$ $S'_\alpha = -5L/(72h)$.

Усилие в коротком наклонном стержне при опоре, обозначенного на рис. 3 номером 14, может быть вычислено по формуле

$$S'_\beta = \frac{S_\beta}{R} = -\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{a^2}{h^2}}. \qquad (9)$$

При $n = 2$ это усилие $S'_\beta = -L/(4h)\sqrt{1/4 + h^2/L^2}$, но уже при $n = 4$ это усилие примерно в два раза меньше и равно $S'_\beta = -L/(4h)\sqrt{1/16 + h^2/L^2}$.

Пример 1. В качестве первого примера рассмотрим кинематически изменяемую ферму с шарнирами в узлах и с числом панелей, равным трем (см. рис. 2). Покажем, что эта ферма кинематически изменяемая. Для простоты предположим, что $a/h = 1$, т.е. раскосы имеют угол наклона, равный 45°. Для узлов этой фермы 1, 2, 3, 4, 6 и 7 можно составить 12 уравнений равновесия относительно 12 неизвестных усилий в стержнях фермы. Однако для этой системы уравнений можно найти ненулевое решение (ненулевые значения усилий), которые соответствуют нулевой нагрузке (отсутствию приложенных внешних сил). Например, таким решением может являться следующее решение:

$$S_{1-2} = S_{1-5} = S_{3-4} = S_{4-8} = 0,$$

$$S_{2-5} = S_{5-6} = S_{3-8} = S_{7-8} = 1,$$

$$S_{2-7} = S_{3-6} = -1, S_{2-3} = S_{6-7} = \sqrt{2}. \qquad (10)$$

Из этого в частности следует, что определитель системы равен нулю. Поэтому при приложении ненулевой внешней нагрузки решение уравнений равновесия не будет единственным.

Теперь рассмотрим ферму со стержнями, которые имеют ненулевую изгибную жесткость, и с жесткими соединениями стержней в узлах вместо

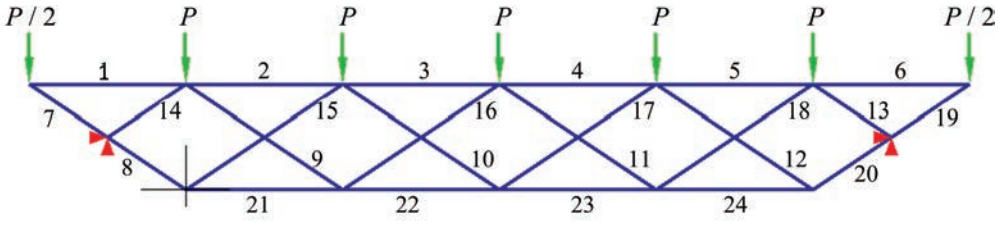


Рис. 3. Конечно-элементная модель фермы с шестью панелями (номера конечных элементов показаны цифрами)

шарниров. Для расчета такой фермы будем использовать конечно-элементную программу LISA 8.0. Назначим по одному балочному элементу на каждый стержень. Изгибную жесткость балочных элементов выберем в соответствии со значениями, взятыми из сортамента двутавров (в частности, для двутаврового сечения с номером профиля 23Б1). Таким образом, изгибная жесткость не принимает слишком больших нереальных значений. Надо отметить, что даже небольшое значение изгибной жесткости добавляет лишние связи, превращает ферму в многократно статически неопределимую и кинематически неизменяемую конструкцию, для которой можно найти численное решение. Также надо отметить, что решение при этом мало зависит от конкретного значения принятой изгибной жесткости, если значения жесткости выбирать в пределах, указанных в сортаменте.

Приводим решение для фермы с тремя панелями в виде таблицы. Решение получено для фермы с отношением высоты к пролету h/L, равным 1/9, и отношением радиуса инерции сечения стержней к высоте i_r/h равным 0,0238. Ввиду симметрии фермы и нагрузки количество стержней и узлов сокращено. Нормирование прогибов и продольных усилий производилось в соответствии с формулами (4) и (8).

Пример 2. В качестве следующего примера рассмотрим ферму с отношением высоты к пролету h/L, равным 1/9, и отношением радиуса инерции сечения стержней к высоте i_r/h, равным 0,0238 (последнее отношение используется, если учитывается изгибная жесткость). Рассмотрим, как меняются прогибы и усилия в этой ферме в зависимости от числа панелей.

Рис. 4 показывает зависимость нормированного прогиба Δ' от числа панелей для такой фермы. Кружками показаны прогибы, подсчитанные по формулам (4) и (6) для четного числа панелей n = 2, 4, ... Для случая $n \geq 6$ прогибы середин нижнего и верхнего поясов практически совпадают, однако можно заметить, что если n = 6, 10, 14, ... , то прогиб середины нижнего пояса немного больше прогиба середины верхнего пояса, а если n = 8, 12, 16, ... , то наоборот. Для n = 2, 4 прогиб середины нижнего пояса (синий цвет) существенно меньше прогиба середины верхнего пояса (зеленый цвет), а когда число панелей равно двум (n = 2), то прогиб середины нижнего пояса становится равным нулю.

Сплошными линиями показаны прогибы, полученные с помощью метода конечного элементов. Для получения результатов конечно-элементного анализа была использована программа LISA 8.0. Конечно-элементная модель, созданная этой программой, для случая фермы с шестью панелями была показана на рис. 3. Если число панелей n — четное число, то были использованы ферменные конечные элементы с шарнирами в узлах фермы. Если же число панелей n нечетно, то были использованы балочные элементы с жесткими соединениями в узлах фермах. Граничные условия для фермы с шарнирами в узлах и с жесткими соединениями в узлах были приняты одинаковыми в соответствии с рис. 1.

Как видно из рис. 4, прогибы нижнего пояса монотонно растут при увеличении числа панелей, а для случая когда n = 2, этот прогиб равен нулю. Прогиб середины верхнего пояса не является монотонной функцией числа панелей, и этот прогиб принимает минимальное значение при n = 3, где он практически совпадает с максимальным прогибом. Если ограничиться только четными значениями n, то прогиб будет минимальным при n = 4.

Рис. 4 также показывает максимальные прогибы узлов фермы, полученные с помощью метода конечных элементов. Как видно из рис. 4, при $n \geq 4$ максимальные прогибы достигаются либо в середине нижнего пояса, либо в середине верхнего пояса. При n = 2, 3 максимальные прогибы будут наблюдаться на концах верхнего пояса, а при n = 2 прогибы концов верхнего пояса становятся существенно больше прогибов середин поясов. Максимальные прогибы минимальны при n = 3. Также на рис. 4 показан прогиб середины балки, загруженной такой же равномерно-распределенной нагрузкой, что и ферма. Расстояние между опорами балки равно $L - a = L - L/n$. Момент инерции сечения балки равен сумме моментов инерции верхнего и нижнего поясов фермы. Безразмерный прогиб такой балки вычисляется по формуле

$$\Delta' = \frac{10}{384}\left(\frac{L}{h}\right)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^4 - \frac{1}{32}\left(\frac{L}{h}\right)^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n^2}. \quad (11)$$

Безразмерные продольные усилия и прогибы для фермы (n = 3, h/L = 1/9, i_r/h = 0,0238)

Стержень	Усилия S'	Узел	Прогиб Δ'
1-2	0,485	1	0,692
2-3	−0,157	2	0,555
1-5	−0,514	6	0,267
2-5	−0,858		
2-7	−0,179		
5-6	0,177		
6-7	0,337		

Видно хорошее совпадение прогибов такой эквивалентной балки и нижнего пояса фермы.

Рис. 5 показывает зависимость сжимающих усилий в стержнях фермы от числа панелей. Ферма имеет отношение высоты к пролету, равное 1/9. Усилия, вычисленные по формулам (8) и (9), показаны кружками. Как видно из рис. 5, усилия в среднем стержне верхнего пояса растут при увеличении числа панелей и минимальны при $n = 4$, а усилия в коротком наклонном стержне при опоре убывают, но принимают большие значения при $n = 2$.

Результаты также были получены с помощью метода конечных элементов. Как и прежде, для четного числа панелей были использованы ферменные элементы, а для нечетного числа панелей — балочные элементы.

Как видно из рис. 5, при $n \geq 5$ максимальные усилия сжатия совпадают с усилиями в среднем стержне верхнего пояса, а при $n = 2, 3, 4$ усилия сжатия будут максимальны в коротком наклонном стержне при опоре.

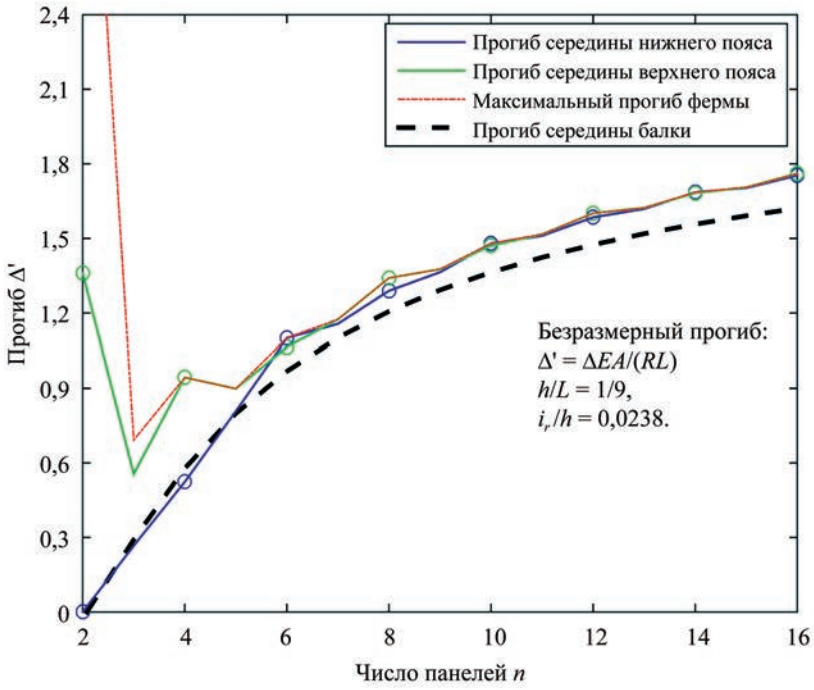


Рис. 4. Зависимость прогибов фермы от числа панелей

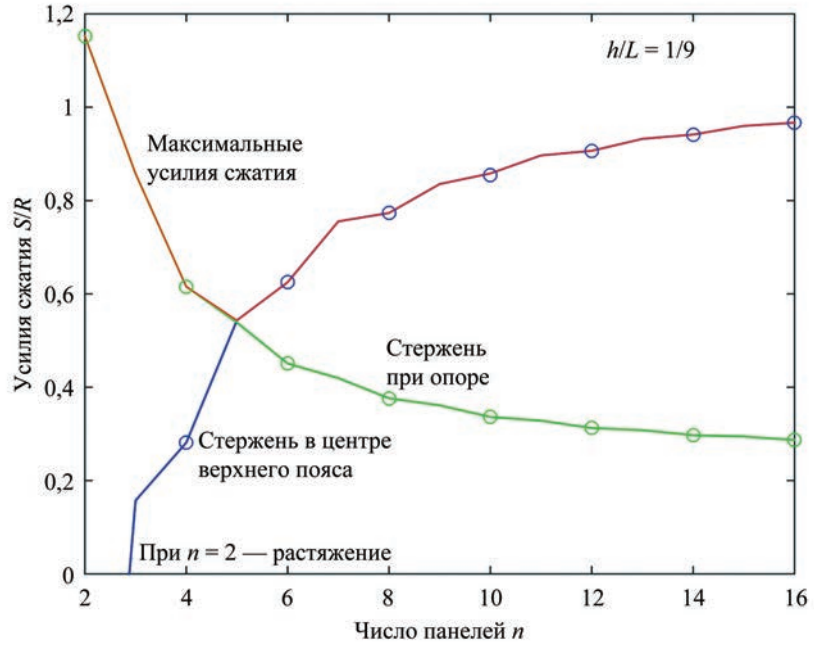


Рис. 5. Зависимость сжимающих усилий в стержнях фермы от числа панелей

Максимальные усилия сжатия будут минимальны при $n = 5$, и в целом график показывает, что сжимающие усилия принимают небольшие значения, если число панелей равно четырем, пяти или шести. Если снова обратиться к рис. 4 и заметить, что и прогибы принимают небольшие значения для этих значений n, то можно сделать вывод об оптимальности фермы с числом панелей, равным четырем, пяти или шести.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mehrjooa M., Khajia N., Moharramia H., Bahreininejadb A.* Damage detection of truss bridge joints using artificial neural networks // Expert Systems with Applications. 2008, Vol. 35, Issue 3. pp. 1122–1131.

2. *Babaei M., Sheidaii M.* Optimal design of double layer scallop domes using genetic algorithm // Applied Mathematical Modelling 2013. Vol. 37(4). Pp. 2127–2138.

3. *Balling R. J., Briggs R., Gillman K.* Multiple optimum size/shape/topology designs for skeletal structures using a genetic algorithm // Journal of Structural Engineering. 2006. 132(7). pp. 1158–1165.

4. *Kalyanmoy D., Gulati S.* Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms // Finite Elements in Analysis and Design. 2001. Vol. 37 (5). pp. 447–465.

5. *Dominguez A., Stiharu I., Sedaghati R.* Practical design optimization of truss structures using the genetic algorithms // Research in Engineering Design. 2006. Vol. 17. pp. 73–84.

6. *Finotto V.C., Da Silva W., Valasek M., Stemberk P.* Hybrid fuzzy-genetic system for optimizing cabled-truss structures // Advances in Engineering Software. 2013. Vol. 62–63. pp. 85–96.

7. *Grierson D.E., Pak W.H.* Optimal sizing, geometrical and topological design using a genetic algorithm // Structural Optimization. 1993. Vol. 6. Pp. 151–159.

8. *Hajela P., Lee E.* Genetic algorithms in truss topological optimization // International Journal of Solids and Structures. 1995. Vol. 32 (22). Pp. 3341–3357.

9. *Kaveh A., Kalatjari V.* Topology optimization of trusses using genetic algorithm, force method and graph theory // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2003. Vol. 791. Pp. 771–791.

10. *Kaveh A., Shahrouzi M.* Simultaneous topology and size optimization of structures by genetic algorithm using minimal length chromosome // Engineering Computations. 2006. vol. 23 (6). pp. 644–674.

11. *Stolpe M., Svanberg K.* A stress-constrained truss-topology and material-selection problem that can be solved by linear programming // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2004. Vol. 27. Pp. 126–129.

12. *Hutchinson R. G., Fleck N. A.* Microarchitectured cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. Vol. 85. No. 9. pp. 607–617.

13. *Shipaeva A.S.* Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple //Science Almanac. 2016. № 5-3(19). Pp. 236–239.

14. *Bolotina T. D.* The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3(8). Pp. 7–8.

15. *Ponamareva M. A.* The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Science Almanac. 2016. № 4-3(18). Pp. 257–259.

16. *Voropai R.A., Kazmiruk I. Yu.* Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10–12.

17. *Voropai R. A.* Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice // Science Almanac. 2016. № 4-3(18). Pp. 238–240.

18. *Тиньков Д. В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5(57). С. 66–73.

19. *Кийко Л.К.* Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247–254.

20. *Кирсанов М.Н.* Зависимость прогиба решетчатой фермы от числа панелей // Научный вестник Воронежского ГАСУ. Строительство и архитектура. 2016. № 4(44). С. 150–157.

21. *Кирсанов М.Н.* Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65.

22. *Кирсанов М.Н.* Балочная ферма, чувствительная к четности числа панелей // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности : сб. науч. тр. по мат. междунар. науч.-практ. конф. 30 апреля 2014 г. : Ч. 2. Тамбов: Консалтинговая компания Юком, 2014. Pp. 52–53.

23. *Кирсанов М.Н.* Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 4. С. 9–12.

24. *Кирсанов М.Н.* Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5(39). С. 61–68.

25. *Кирсанов М.Н.* Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.

Поступила в редакцию в январе 2017 г.
Принята в доработанном виде в мае 2017 г.
Одобрена для публикации в июне 2017 г.

Об авторах: **Кирсанов Михаил Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники, **Национальный исследовательский университет МЭИ (НИУ МЭИ)**, 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14; C216@ya.ru;

Суворов Александр Павлович — кандидат технических наук, старший преподаватель, кафедра прикладной математики, **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; suvora2003@yahoo.com.

REFERENCES

1. Mehrjooa M., Khajia N., Moharramia H., Bahreininejadb A. Damage Detection of Truss Bridge Joints Using Artificial Neural Networks. *Expert Systems with Applications*. 2008, vol. 35, issue 3, pp. 1122–1131.

2. Babaei M, Sheidaii M. Optimal Design of Double Layer Scallop Domes Using Genetic Algorithm. *Applied Mathematical Modelling*. 2013, vol. 37(4), pp. 2127–2138.

3. Balling R. J., Briggs R., Gillman K. Multiple Optimum Size/Shape/Topology Designs for Skeletal Structures Using a Genetic Algorithm. *Journal of Structural Engineering*. 2006, vol. 132(7), pp. 1158–1165.

4. Kalyanmoy D., Gulati S. Design of Truss-Structures for Minimum Weight Using Genetic Algorithms. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2001, vol. 37 (5), pp. 447–465.

5. Dominguez A., Stiharu I., Sedaghati R. Practical Design Optimization of Truss Structures Using the Genetic Algorithms. *Research in Engineering Design*. 2006, vol. 17, pp. 73–84.

6. Finotto V. C., Da Silva W., Valasek M., Stemberk P. Hybrid Fuzzy-Genetic System for Optimizing Cabled-Truss Structures. *Advances in Engineering Software*. 2013, vol. 62–63, pp. 85–96.

7. Grierson D. E., Pak W. H. Optimal Sizing, Geometrical and Topological Design Using a Genetic Algorithm. *Structural Optimization*. 1993, vol. 6, pp. 151–159.

8. Hajela P., Lee E. Genetic Algorithms in Truss Topological Optimization. *International Journal of Solids and Structures*. 1995, vol. 32 (22), pp. 3341–3357.

9. Kaveh A., Kalatjari V. Topology Optimization of Trusses Using Genetic Algorithm, Force Method and Graph Theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003, vol. 791, pp. 771–791.

10. Kaveh A., Shahrouzi M. Simultaneous Topology and Size Optimization of Structures by Genetic Algorithm Using Minimal Length Chromosome. *Engineering Computations*. 2006, vol. 23 (6), pp. 644–674.

11. Stolpe M., Svanberg K. A Stress-Constrained Truss-Topology and Material-Selection Problem That Can Be Solved by Linear Programming. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2004, vol. 27, pp. 126–129.

12. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitectured Cellular Solids — the Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005, vol. 85, no. 9, pp. 607–617.

13. Shipaeva A.S. Calculation of the Deflection of Girder Beam Loaded on the Bottom Flange in the System Maple. *Science Almanac*. 2016, no. 5-3(19), pp. 236–239.

14. Bolotina T. D. The Deflection of the Flat Arch Truss with a Triangular Lattice Depending on the Number of Panels. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016, no. 4-3(8), pp. 7–8.

15. Ponamareva M. A. The Displacement of the Support Trusses with Parallel Belts under Uniform Load. *Science Almanac*. 2016, no. 4-3(18), pp. 257–259.

16. Voropai R.A., Kazmiruk I. Yu. Analytical Study of the Horizontal Stiffness of the Flat Statically Determinate Arch Truss. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016, no. 2-1(6), pp. 10–12.

17. Voropai R. A. Analysis of the Deflection of the Regular Truss with Cross Type Lattice. *Science Almanac*. 2016, no. 4-3(18), pp. 238–240.

18. Tin'kov D.V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruktsiy [Comparative Analysis of Analytical Solutions to the Problem of Truss Structure Deflection]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2015, no. 5(57), pp. 66–73. (In Russian)

19. Kiyko L.K. Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermy pod deystviem vetrovoy nagruzki [Analytical Evaluation of Deflection of Arched Trusses under the Action of Wind Loads]. *Nauchnyy vestnik* [Science Bulletin]. 2016, no. 1 (7), pp. 247–254. (In Russian)

20. Kirsanov M.N. Zavisimost' progiba reshetchatoj fermy ot chisla panelej [Dependence of the Deflection of the Trusses on the Number of Panels] *Nauchnyj vestnik Voronezhskogo GASU. Stroitel'stvo i arhitektura.*[Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Building and Architecture] 2016, no. 4(44), pp. 150–157. (In Russian)

21. Kirsanov M.N. Analiz progiba reshetchatoj balochnoj fermy raspornogo tipa [Analysis of the Deflection of a Strut-Type Lattice Girder Truss] *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering] 2015, no. 5(57), pp. 58–65. (In Russian)

22. Kirsanov M.N. Balochnaya ferma, chuvstvitel'naya k chetnosti chisla panelej [Girder Sensitive to the Parity of the Number of Panels] *Aktual'nye voprosy v nauchnoj rabote i obrazovatel'noj deyatel'nosti. Sbornik nauchnyh trudov po materialam Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii: Ch. 2.* [Current Issues in Research and Educational Activities : Collected Scientific Works on Materials of the International Scientific-Practical Conference : Part 2] 2014. Tambov, Ucom Publ., Pp. 52–53. (In Russian)

23. Kirsanov M.N. Skrytaya osobennost' i asimptoticheskie svojstva odnoj ploskoj balochnoj fermy [Hidden Features and Asymptotic Properties of the Plane Truss] *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2014, vol. 4, pp. 9–12. (In Russian)

24. Kirsanov M.N. Staticheskij analiz i montazhnaya skhema ploskoj fermy [Static Analysis and Mounting Diagram of Flat Truss] *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova.* [Bulletin of the Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping]. 2016, no. 5(39), pp. 61–68. (In Russian)

25. Kirsanov M.N. *Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki* [Maple and Maplet. Solutions to Mechanics Problems]. Saint-Petersburg, Lan' Publ., 2012. 510 p. (In Russian)

Received in January 2017.
Adopted in revised form in May 2017.
Approved for publication in June 2017.

About the authors: **Kirsanov Mikhail Nikolaevich** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of the Theoretical Mechanics and Mechatronics, **National Research University Moscow Power Engineering Institute (MPEI)**, 14 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250, Russian Federation; C216@ya.ru;

Suvorov Alexander Pavlovich — Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; suvora2003@yahoo.com.